Birkhoff-Gustavson正規化の逆問題を巡って：「近可積分ハミルトン系」(近可積分ハミルトン系の数理と応用)

上野, 嘉夫

数理解析研究所講究録 1282 巻 2002 年 142-152

Birkhoff-Gustavson 正規化の逆問題を巡って [1] [2]

京都大学・情報学研究科　上野 嘉夫 (Yoshio Uwano)
Graduate School of Informatics
Kyoto University

1　はじめに

非線形ハミルトン系の平衡点が，線形近似において半単純安定であるとき，その平衡点近傍の解析に Birkhoff-Gustavson (BG) 正規形変換が有効なことが知られている (例えば [1] 参照). BG 正規化の定義は 2 章で述べるとして，まずそのスケッチから始めよう．議論を拡散させないため，本稿では次を仮定する．

(仮定) 相空間は $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ とし，その原点は与えられた力学系の平衡点となっている．その平衡点まわり線形近似における運動の角周波数は 1:1 共鳴である．

BG 正規化とは，原点（1:1 共鳴安定平衡点）まわりで級数展開されたハミルトニアンを，原点を固定するような (局所) 正準変換によって，次の (i), (ii) を満たす級数に移す操作をいう [3]：

(i) 変換で得られる級数は 2 次のオーダーから始まり，その斉 2 次項は，もとの (級数形) ハミルトニアンの斉 2 次項で旧変数を新変数に置き換えたものに等しい．

(ii) 変換後の級数において，斉 $s(3 \leq s \leq \exists\rho)$ 次項は，(i) で言及した斉 2 次項と Poisson 可換である．

(i) と (ii) を満たす級数は,「ρ 次まで Birkhoff-Gustavson 正規形である」と言われる．

BG 正規形級数を有限次で打ち切って得られる多項式をハミルトニアンにもつハミルトン系を考え,「打ち切りハミルトン系」[4] と呼ぼう.「打ち切りハミルトン系」は，本稿の仮定により，正規化前の系が可積分か否かに関わらず，可積分である．正規化前の系では，原点（平衡点）近傍において支配的なのは条件周期的運動であるため，ポアンカレ断面を描くとトーラスの入れ子構造が見られる．この入れ子構造ときわめてよく似た構造が「打ち切りハミルトン系」の原点（平衡点）近傍のポアンカレ断面にも現れることが知られている．このオブザベーションは，正規化前の系の正則領域の構造を，BG 正規化を経て得られる打ち切り系のもつ可積分構造によって近似できることを主張している．この辺りの精密な結果の例として Kummer [2]，のちに Cushman [3] などが挙げられる：もとの系が原点近傍で周期軌道分岐を見せる場合，その周期軌道分岐は「打ち切りハミルトン系」によってよく再現できることが示されている．

このように，与えられた非線形ハミルトン系と，その BG 正規化を経て得られる「打ち切りハミルトン系」とが，ある意味で「よく似ている」のであるから,「打ち切りハミルトン系」自体が何か面白い性質を持つならば，その性質は正規化前の系の正則領域に色濃く反映されると期待するのは自然であろう．この視点から BG 正規化を眺めると,「打ち切りハミルトン系」を同じくするハミルトン系は多数存在するから，指定された BG 正規形ハミルトン関数に変換可能なハミルト

[1] 本稿は数研共同研究集会「近可積分ハミルトン系の数理と応用」(March 4〜6, 2002) 講演予稿の一部追加，改訂版である．

[2] 科研費，基盤 (C)(2)No.13660065 の補助を受けている．

[3] 本稿では，無限級数が何度か現れるが，その収束性は一般には保証されない．実用上は，無限級数を有限次数で打ち切って使うので収束性に由来する深刻な問題は生じない．

[4] Kummer [2] は，truncate Hamiltonian system と言及している．

ン関数の族を同定することは重要な問題と考えられる．筆者は，今述べた同定問題を「BG 正規化の逆問題」と名づけて定式化を行い，その解法を与え，解法アルゴリズムを数式処理プログラムとして実装し，いくつかの具体的な問題を解いた [4,5,6,7]. 逆問題を思い付いた直接の動機は，4 次 BG 正規形ハミルトニアンを持つ系における周期軌道分岐に関する古典量子対応について講演者が得た結果 [8-11] の応用可能性の模索にある．

本稿では，BG 正規化の逆問題を巡る話題として 2 次元調和振動子に斉 r 次多項式ポテンシャルの摂動を印加した系 (以下では，r-PHO と略記する) の $2(r-1)$ 次 BG 正規形に対する逆問題をとりあげる．BG 正規化を媒介とすることで，次数の異なる斉次多項式ポテンシャルの摂動を印加された振動子系の間に密接な関係が見出される．すなわち，

(I) 3-PHO と 4-PHO とが 4 次まで同じ BG 正規形を共有するための必要十分条件は，回転点変換の枠内で 3-PHO ハミルトニアンが変数分離可能なことである [6,12] [5].

(II) (I) の一般化: r が 3 以上の奇数のとき，r-PHO と $2(r-1)$-PHO とが同一の $2(r-1)$ 次 BG 正規形を共有するための必要十分条件は，回転点変換の枠内で r-PHO ハミルトニアンが変数分離可能となることである [12].

(I) は (II) の特殊な場合であるにもかかわらず分けて書いた理由は，逆問題を解く数式処理プログラムチェックを Hénon-Heiles 系にて行った延長上で (I) が発見され，一般化の証明は最近できたという研究経緯にある．以下，本稿では，BG 正規化の順問題と逆問題を説明し，それに続いて結果 (I), (II) について述べる．

2 Birkhoff-Gustavson(BG) 正規化の順問題と逆問題

2.1 順問題

まず，BG 正規化（順問題）の定式化から始めよう．大筋は Moser の古典的な講義録 [1] に従っているが，Moser が陽には言及していない条件を付加したことで正規化の一意性が保証される [4,6].

相空間 $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2$ にデカルト座標 (q,p) を導入し，シンプレクティック構造を 2 形式 $\sum_{j=1}^{2} dp_j\wedge dq_j$ で与えよう．§1 の仮定の下では，与えられたハミルトニアン $K(q,p)$ は原点（平衡点）まわりで

$$K(q,p)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(p_j^2+q_j^2)+\sum_{k=3}^{\rho}K_k(q,p) \tag{2.1}$$

と級数展開される（脚注 3 参照）．2 型母関数[6]

$$W(q,\eta)=\sum_{j=1}^{2}q_j\eta_j+\sum_{k=3}^{\infty}W_k(q,\eta) \tag{2.2}$$

で生成される原点近傍での（局所）正準変換

$$(q,p)\to(\xi,\eta)\quad\text{with}\quad p=\frac{\partial W}{\partial q},\ \xi=\frac{\partial W}{\partial \eta}, \tag{2.3}$$

を考え，正準変換 (2.3) を通じて K から

$$G(\frac{\partial W}{\partial \eta},\eta)=K(q,\frac{\partial W}{\partial q}) \tag{2.4}$$

---

[5] [6] では Bertrand-Darboux 定理の形式で書いたが，変数分離可能性の形に精密化できた [12].

[6] 旧位置変数 (q) の新運動量変数 (η) の関数形をとる．

により，級数

$$G(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(\eta_j^2+\xi_j^2)+\sum_{k=3}^{\infty}G_k(\xi,\eta) \tag{2.5}$$

を定めよう．ただし，$G_k(\xi,\eta)$ は (ξ,η) の斉 k 次多項式 $(k=3,4,\cdots)$ である．

定義 2.1 $K(q,p)$ から (2.4) により定まる級数 $G(\xi,\eta)$ が ρ 次まで BG 標準形であるとは，Poisson 交換関係式

$$\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(\eta_j^2+\xi_j^2),G_k\}_{\xi,\eta}=0 \quad (k=3,\cdots,\rho) \tag{2.6}$$

が成立するときをいう．ただし，$\{\cdot,\cdot\}_{\xi,\eta}$ は正準変数 (ξ,η) に関する標準 Poisson 括弧式を表わす．■

BG 正規化の順問題を定義するため，微分作用素

$$D_{q,\eta}=\sum_{j=1}^{2}\left(q_j\frac{\partial}{\partial\eta_j}-\eta_j\frac{\partial}{\partial q_j}\right). \tag{2.7}$$

を用意する．

定義 2.2 (順問題) (2.1) で与えられる級数形ハミルトニアン $K(q,p)$ を，(2.4)，(2.5)，$\rho=\infty$ ととった (2.6) を満たす BG 正規形級数 $G(\xi,\eta)$ に変換せよ．ただし，2 型母関数 $W(q,\eta)$ は，(2.2) と

$$W(q,\eta)\in \mathrm{image}D_{q,\eta} \tag{2.8}$$

を満たすようにとる[7]．■

実用上は，以下の次数制約付き順問題 (ρ 次順問題) を考えれば十分である．

定義 2.2 (ρ 次順問題) (2.1) で表される ρ 次多項式ハミルトニアン $K(q,p)$ を，(2.4), (2.6) をそれぞれ ρ 次まで満たす ρ 次 BG 正規形多項式 $G(\xi,\eta)$ に変換せよ．ただし，2 型母関数 $W(q,\eta)$ は，(2.2)，(2.8) を満たす ρ 次多項式とする．■

2.2 逆問題

逆問題では BG 正規形級数（ないしは多項式）$G(\xi,\eta)$ を与えておき，それを BG 正規形に持つ級数（ないしは多項式）ハミルトニアンの族を求める．定式化の手始めとして，$G(\xi,\eta)$ が (2.1) の級数 $K(q,p)$ の BG 正規形である状況を考察しよう．(2.2)-(2.3) で定まる正準変換 $(q,p)\to(\xi,\eta)$ の逆変換が，3 型母関数[8] $-W(q,\eta)$ で生成される正準変換，

$$(\xi,\eta)\to(q,p) \quad \text{with} \quad p=-\frac{\partial(-W)}{\partial q},\ \xi=-\frac{\partial(-W)}{\partial\eta}, \tag{2.9}$$

であることと，(2.4) の書き換え

$$K(q,-\frac{\partial(-W)}{\partial q})=G(-\frac{\partial(-W)}{\partial\eta},\eta) \tag{2.10}$$

より，級数 $K(q,p)$ はその BG 正規形級数 $G(\xi,\eta)$ から変換 (2.9) により再現されることがわかる．これを踏まえると，逆問題を以下のように定義できる．

定義 2.3 (逆問題) BG 正規形級数 $G(\xi,\eta)$ を (2.5) で与えるとき，

$$K(q,-\frac{\partial S}{\partial q})=G(-\frac{\partial S}{\partial\eta},\eta) \tag{2.11}$$

---

[7] 条件 (2.8) が K の BG 正規形 G の一意性を保証する [6].

[8] 旧運動量変数 (η) と新位置変数 (q) の関数形.

を満たす (2.1) の形の級数 $K(q,p)$ をすべて求めよ．ただし，$S(q,\eta)$ は

$$S(q,\eta) = -\sum_{j=1}^{2} q_j\eta_j - \sum_{k=3}^{\infty} S_k(q,\eta) \tag{2.12}$$

で表される 3 型母関数 ($S_k(q,\eta)$: (q,η) の斉 k 次多項式 $(k=3,4,\cdots)$) で，

$$S(q,\eta) \in \mathrm{image} D_{q,\eta} \tag{2.13}$$

を満たすとする．■

順問題と同様に，実用上は以下の次数制約付き逆問題 (ρ 次逆問題) を考えれば十分である．

定義 2.4 (ρ 次逆問題) ρ 次 BG 正規形多項式 $G(\xi,\eta)$ に対して，(2.11) を ρ 次まで満たす (2.1) の形の ρ 次多項式 $K(q,p)$ をすべて求めよ．ただし，3 型母関数 $S(q,\eta)$ は，(2.12) と (2.13) を満たす ρ 次多項式とする．■

2.3 数式処理による解法

§2.1 と §2.2 より，順問題と逆問題に関する対照表 (表 1) が得られる．本稿では詳しく述べないが，

	順問題	逆問題
given	$K(q,p)$	$G(\xi,\eta)$: BGNF
identify	$G(\xi,\eta)$: BGNF	$H(q,p)$
canonical transformation	$(q,p)\to(\xi,\eta)$	$(\xi,\eta)\to(q,p)$
generating function	$W(q,\eta)$: 2nd-type	$S(q,\eta)$: 3rd-type
defining equation	$G(\frac{\partial W}{\partial\eta},\eta) = K(q,\frac{\partial W}{\partial q})$	$H(q,-\frac{\partial S}{\partial q}) = G(-\frac{\partial S}{\partial\eta},\eta)$

表 1 順問題と逆問題の対照表

解法の中の計算のほとんどが多項式に関する 4 則演算，微分，その逆演算としての積分からなっているので，数式処理と相性がよい[9]．試作段階だが，REDUCE 上を走るプログラム例 (ANFER (Algorithm for Normal From Expansion and Restoration)) を webpage [14] に置いている．

3 調和振動子の斉 3 次多項式ポテンシャル摂動系に対する逆問題

3.1 ワンパラメータ Hénon-Heiles 系

逆問題のイメージをより具体化する目的で，ワンパラメータの Hénon-Heiles(HH) 系に対する逆問題をとりあげる．HH 系のハミルトニアン

$$K_\mu(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(p_j^2+q_j^2) + q_1^2q_2 + \mu q_2^3 \qquad (\mu\in\mathbf{R}). \tag{3.1}$$

の 4 次までの BG 正規形 $G(\xi,\eta)$ は，

$$\begin{aligned} G_\mu(\xi,\eta) = &\frac{1}{2}(\zeta_1\bar{\zeta}_1 + \zeta_2\bar{\zeta}_2) \\ &+ \frac{1}{48}\Big\{-5\zeta_1^2\bar{\zeta}_1^2 - 45\mu^2\zeta_2^2\bar{\zeta}_2^2 - (8+36\mu)\zeta_1\zeta_2\bar{\zeta}_1\bar{\zeta}_2 \\ &\qquad +3\mu\zeta_1^2\bar{\zeta}_2^2 + 3\mu\zeta_2^2\bar{\zeta}_1^2 - 6\zeta_1^2\bar{\zeta}_2^2 - 6\zeta_2^2\bar{\zeta}_1^2\Big\} \end{aligned} \tag{3.2}$$

[9] 筆者の経験からは手計算はやりたくない種類の計算である．

となる．ただし，$\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$ $(j=1,2)$．$G_\mu(\xi,\eta)$ に対する 4 次逆問題の解[10]，

$$H_\mu(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(p_j^2+q_j^2) + H_{\mu,3}(q,p) + H_{\mu,4}(q,p) \tag{3.3}$$

の斉 3 次多項式部分 $H_{\mu,3}(q,p)$ は，$z_j = q_j + ip_j$ $(j=1,2)$ とするとき，

$$\begin{aligned} H_{\mu,3}(q,p) = {} & a_1 z_1^3 + a_2 z_1^2 z_2 + a_3 z_1 z_2^2 + a_4 z_2^3 + a_5 z_1^2 \overline{z}_1 \\ & + a_6 z_1^2 \overline{z}_2 + a_7 z_1 z_2 \overline{z}_1 + a_8 z_1 z_2 \overline{z}_2 + a_9 z_2^2 \overline{z}_1 + a_{10} z_2^2 \overline{z}_2 \\ & + \overline{a}_1 \overline{z}_1^3 + \overline{a}_2 \overline{z}_1^2 \overline{z}_2 + \overline{a}_3 \overline{z}_1 \overline{z}_2^2 + \overline{a}_4 \overline{z}_2^3 + \overline{a}_5 z_1 \overline{z}_1^2 \\ & + \overline{a}_6 z_2 \overline{z}_1^2 + \overline{a}_7 z_1 \overline{z}_1 \overline{z}_2 + \overline{a}_8 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 + \overline{a}_9 z_1 \overline{z}_2^2 + \overline{a}_{10} z_2 \overline{z}_2^2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

で，斉 4 次多項式部分 $H_{\mu,4}(q,p)$ は

$$\begin{aligned} H_{\mu,4}(q,p) = {} & c_1 z_1^4 + c_2 z_1^3 z_2 + c_3 z_1^2 z_2^2 + c_4 z_1 z_2^3 + c_5 z_2^4 + c_6 z_1^3 \overline{z}_1 + c_7 z_1^3 \overline{z}_2 \\ & + c_8 z_1^2 z_2 \overline{z}_1 + c_9 z_1^2 z_2 \overline{z}_2 + c_{10} z_1 z_2^2 \overline{z}_1 + c_{11} z_1 z_2^2 \overline{z}_2 + c_{12} z_2^3 \overline{z}_1 + c_{13} z_2^3 \overline{z}_2 \\ & + \overline{c}_1 \overline{z}_1^4 + \overline{c}_2 \overline{z}_1^3 \overline{z}_2 + \overline{c}_3 \overline{z}_1^2 \overline{z}_2^2 + \overline{c}_4 \overline{z}_1 \overline{z}_2^3 + \overline{c}_5 \overline{z}_2^4 + \overline{c}_6 z_1 \overline{z}_1^3 + \overline{c}_7 z_2 \overline{z}_1^3 \\ & + \overline{c}_8 z_1 \overline{z}_1^2 \overline{z}_2 + \overline{c}_9 z_2 \overline{z}_1^2 \overline{z}_2 + \overline{c}_{10} z_1 \overline{z}_1 \overline{z}_2^2 + \overline{c}_{11} z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2^2 + \overline{c}_{12} z_1 \overline{z}_2^3 + \overline{c}_{13} z_2 \overline{z}_2^3 \\ & + 8\,(a_9\overline{a}_{10} z_2^2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 + a_9 \overline{a}_9 z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 + a_{10}\overline{a}_9 z_1 z_2 \overline{z}_2^2 \\ & \qquad + a_5 \overline{a}_6 z_1 z_2 \overline{z}_1^2 + a_6 \overline{a}_5 z_1^2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 + a_6 \overline{a}_6 z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2) \\ & + 6\,(a_1 \overline{a}_1 z_1^2 \overline{z}_1^2 + a_{10}\overline{a}_{10} z_2^2 \overline{z}_2^2 + a_4 \overline{a}_4 z_2^2 \overline{z}_2^2 + a_5 \overline{a}_5 z_1^2 \overline{z}_1^2) \\ & + 4\,(a_8 \overline{a}_5 z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 + a_8 \overline{a}_6 z_2^2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 + a_8 \overline{a}_9 z_1^2 \overline{z}_2^2 + a_9 \overline{a}_7 z_1 z_2 \overline{z}_1^2 \\ & \qquad + a_9 \overline{a}_8 z_2^2 \overline{z}_1^2 + a_1 \overline{a}_2 z_1^2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 + a_{10} \overline{a}_7 z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 + a_2 \overline{a}_1 z_1 z_2 \overline{z}_1^2 \\ & \qquad + a_3 \overline{a}_4 z_1 z_2 \overline{z}_2^2 + a_4 \overline{a}_3 z_2^2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 + a_5 \overline{a}_8 z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 + a_6 \overline{a}_7 z_1^2 \overline{z}_2^2 \\ & \qquad + a_6 \overline{a}_8 z_1 z_2 \overline{z}_2^2 + a_7 \overline{a}_{10} z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 + a_7 \overline{a}_6 z_2^2 \overline{z}_1^2 + a_7 \overline{a}_9 z_1^2 \overline{z}_1 \overline{z}_2) \\ & + \tfrac{8}{3}\,(a_2 \overline{a}_2 z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 + a_3 \overline{a}_3 z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2) \\ & + 2\,(a_8 \overline{a}_{10} z_1 z_2 \overline{z}_2^2 + a_8 \overline{a}_7 z_1^2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 + a_8 \overline{a}_7 z_1 z_2 \overline{z}_2^2 + a_8 \overline{a}_8 z_2^2 \overline{z}_2^2 \\ & \qquad + a_1 \overline{a}_3 z_1^2 \overline{z}_2^2 + a_{10} \overline{a}_8 z_2^2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 + a_2 \overline{a}_4 z_1^2 \overline{z}_2^2 + a_3 \overline{a}_1 z_2^2 \overline{z}_1^2 \\ & \qquad + a_4 \overline{a}_2 z_2^2 \overline{z}_1^2 + a_5 \overline{a}_7 z_1^2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 + a_7 \overline{a}_5 z_1 z_2 \overline{z}_1^2 + a_7 \overline{a}_7 z_1^2 \overline{z}_1^2 \\ & \qquad + a_7 \overline{a}_8 z_1 z_2 \overline{z}_1^2 + a_7 \overline{a}_8 z_2^2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 - a_8 \overline{a}_6 z_1 z_2 \overline{z}_1^2 - a_7 \overline{a}_9 z_1 z_2 \overline{z}_2^2 \\ & \qquad - a_9 \overline{a}_5 z_2^2 \overline{z}_1^2 - a_9 \overline{a}_7 z_2^2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 - a_9 \overline{a}_9 z_2^2 \overline{z}_2^2 - a_{10} \overline{a}_6 z_2^2 \overline{z}_1^2 \\ & \qquad - a_5 \overline{a}_9 z_1^2 \overline{z}_2^2 - a_6 \overline{a}_{10} z_1^2 \overline{z}_2^2 - a_6 \overline{a}_6 z_1^2 \overline{z}_1^2 - a_6 \overline{a}_8 z_1^2 \overline{z}_1 \overline{z}_2) \\ & + \tfrac{4}{3}\,(+a_2 \overline{a}_3 z_1^2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 + a_2 \overline{a}_3 z_1 z_2 \overline{z}_2^2 + a_3 \overline{a}_2 z_1 z_2 \overline{z}_1^2 + a_3 \overline{a}_2 z_2^2 \overline{z}_1 \overline{z}_2) \\ & + \tfrac{2}{3}\,(a_2 \overline{a}_2 z_1^2 \overline{z}_1^2 + a_3 \overline{a}_3 z_2^2 \overline{z}_2^2) \\ & + \tfrac{1}{48}\,(-8 z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 - 5 z_1^2 \overline{z}_1^2 - 6 z_1^2 \overline{z}_2^2 - 6 z_2^2 \overline{z}_1^2 \\ & \qquad - 36\mu z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 - 45\mu^2 z_2^2 \overline{z}_2^2 + 3\mu z_1^2 \overline{z}_2^2 + 3\mu z_2^2 \overline{z}_1^2), \end{aligned} \tag{3.5}$$

で与えられる．ただし，(3.4), (3.5) における a_h $(h=1,\cdots,10)$ と c_ℓ $(\ell=1,\cdots,13)$ は値を任意に選べる複素パラメータである．したがって，HH 系の 4 次 BG 正規形に対する 4 次逆問題解は，46 自由度を持つことになる．

$H_\mu(q,p)$ が調和振動子の斉 4 次多項式ポテンシャル摂動系 (4-PHO) を与えているかを調べよう [6][11]．H_μ が，4-PHO ハミルトニアンを含むのは，$\mu = 1/3$ の場合のみであることがわかる．$\mu = 1/3$ とはワンパラメータ HH 系が可積分となる場合であって，さらに調べると，$H_{1/3}$ の特解としての 4-PHO ハミルトニアンも可積分となることがわかる．

---

[10] ANFER ver.1.0 [14] 使用.

[11] この問いは，山口義幸氏（京大・情報学研究科）とのディスカッションから出てきた.

3.2 3-PHO に対する逆問題

HH 系での結果が，調和振動子の一般斉 3 次多項式ポテンシャル摂動系（3-PHO）に一般化できるか否かを考えるのは自然な成り行きであろう．すなわち，斉 3 次多項式ポテンシャルを

$$\mathcal{P}_3(q) = f_1q_1^3 + f_2q_1^2q_2 + f_3q_1q_2^2 + f_4q_2^3 \tag{3.6}$$

と表し，3-PHO ハミルトニアン

$$\mathcal{K}^{(3)}(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(p_j^2 + q_j^2) + \mathcal{P}_3(q) \tag{3.7}$$

の BG 正規形の 4 次逆問題解に 4-PHO ハミルトニアンが含まれているか否か，もし含まれている 3-PHO の斉 3 次摂動ポテンシャル $\mathcal{P}_3(q)$ の満たすべき条件は何か，を調べる．本稿では逆問題解の具体形の提示は省略するが[12]，上記の問いに対して次の結果が得られている．

定理 3.1 [6]　3-PHO ハミルトニアン $\mathcal{K}^{(3)}(q,p)$ の BG 正規形の 4 次逆問題解に 4-PHO ハミルトニアンが含まれるための必要十分条件は，

$$3(f_1f_3 + f_2f_4) - (f_2^2 + f_3^2) = 0 \tag{3.8}$$

である．■

定理 3.2 [6]　条件 (3.8) の下で，3-PHO ハミルトニアンと 4 次 BG 正規形を共有する 4-PHO ハミルトニアンの斉 4 次摂動ポテンシャル

$$\mathcal{P}_4(q) = g_1q_1^4 + g_2q_1^3q_2 + g_3q_1^2q_2^2 + g_4q_1q_2^3 + g_5q_2^4 \tag{3.9}$$

と表すとき，

$$9g_2^2 + 4g_3^2 - 24g_1g_3 - 9g_2g_4 = 0, \quad 9g_4^2 + 4g_3^2 - 24g_3g_5 - 9g_2g_4 = 0 \tag{3.10}$$

が成立する．■

(3.8) あるいは (3.10) は何を意味しているのだろうか？ 実は，これらは 3-PHO あるいは 4-PHO に対する Bertrand-Darboux 条件の 'generic' な場合と同値である．

定理 3.3 (Bertrand-Darboux [15])　ハミルトニアン $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(p_j^2+q_j^2) + V(q)$ を持つ，$\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ 上の自然力学系において次の (A)-(C) は互いに同値である．

(A) 5 つの実定数 $(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma') \neq (0,0,0,0,0)$ で，

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right)(-2\alpha q_1q_2 - \beta' q_2 - \beta q_1 + \gamma) \\
&\quad + 2\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2}(\alpha q_2^2 - \alpha q_1^2 + \beta q_2 - \beta' q_1 + \gamma') \\
&\quad + \frac{\partial V}{\partial q_1}(6\alpha q_2 + 3\beta) - \frac{\partial V}{\partial q_2}(6\alpha q_1 + 3\beta') = 0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

を満たすものが存在する．

---

[12] HH 系の例から想像して頂きたい．

(B) この自然力学系は，p に関して 2 次の第 1 積分を許容する．

(C) この自然力学系は，デカルト座標，極座標，放物座標，楕円座標のいずれかにより変数分離可能[13]．■

3-PHO の場合 (3.11) は，

$$\text{(i) (3.8) に同じ,}\quad \text{(ii) rank}\begin{pmatrix} 21f_3 & -f_4+18f_2 & -6f_2+5f_1 \\ -5f_4+6f_2 & -18f_3+f_1 & -21f_2 \end{pmatrix}=1 \tag{3.12}$$

のいずれかに帰着し，4-PHO の場合 (3.11) は

$$\text{(i) (3.10) に同じ,}\quad \text{(ii) } g_3=2g_1=2g_5,\quad g_2=g_4=0 \tag{3.13}$$

のいずれかに帰着する[14]．(3.12) あるいは (3.13) から，(3.8) や (3.10) を generic と呼ぶ理由が見て取れる．すなわち，(3.8) と (3.10) は当該のパラメータ空間の中で，BDC が定めうる最大次元の (部分) 代数多様体を与えるからである．

定理 3.4 [6] 3-PHO と 4-PHO とが同一の 4 次 BG 正規形を共有するならば，3-PHO と 4-PHO のいずれも generic な Bertrand-Darboux の条件を満たす．■

4 r-PHO と $2(r-1)$-PHO の間の関係への一般化

4.1 r-PHO に対する Bertrand-Darboux 条件

一般化に向けて，まず r-PHO に対する Bertrand-Darboux 条件を陽な形式で表すことから始める．それには，斉 r 次多項式ポテンシャル

$$V^{(r)}(q)=\sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}v_j^{(r)}q_1^j q_2^{r-j} \tag{4.1}$$

に対して

$$\mathcal{M}(V^{(r)})=\begin{pmatrix} v_0^{(r)}-v_2^{(r)} & v_1^{(r)}-v_3^{(r)} & \cdots & v_{r-2}^{(r)}-v_r^{(r)} \\ v_1^{(r)} & v_2^{(r)} & \cdots & v_{r-1}^{(r)} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

で定義される $2\times(r-1)$ 行列 $\mathcal{M}(V^{(r)})$ が重要な役割を果たす．

定理 4.1 [12] 調和振動子に斉 r 次多項式ポテンシャル $V^{(r)}(q)$ の摂動を印加した振動子系 (r-PHO) に対する Bertrand-Darboux 条件は，以下のいずれかと同値である．

$(r=3)$ (4.3a) か (4.3b) のいずれかと同値である:

$$\text{rank}\,\mathcal{M}(V^{(3)})=1, \tag{4.3a}$$

$$\text{rank}\begin{pmatrix} 7v_1^{(3)} & -v_0^{(3)}+6v_2^{(3)} & -2v_1^{(3)}+5v_3^{(3)} \\ -5v_0^{(3)}+2v_2^{(3)} & -6v_1^{(3)}+v_3^{(3)} & -7v_2^{(3)} \end{pmatrix}=1. \tag{4.3b}$$

$(r=\text{偶数}\geq 4)$ (4.4a) か (4.4b) のいずれかと同値である：

$$\text{rank}\,\mathcal{M}(V^{(r)})=1, \tag{4.4a}$$

$$\begin{cases} v_{2j}^{(r)}=\dfrac{2j-1}{r-2j+1}v_{2(j-1)}^{(r)} \quad (j=0,1,\cdots,\dfrac{r}{2}), \\ v_{2h-1}^{(r)}=0 \quad (h=1,\cdots,\dfrac{r}{2}). \end{cases} \tag{4.4b}$$

[13] この系の Hamilton-Jacobi 方程式が変数分離可能という意味.

[14] 山口-南部 [16] は，これらの条件を陽に求めた先駆的な論文であるが，(3.12) の (ii) が特殊な例しか書かれていないことが今回わかった.

($r=$ 奇数 ≥ 5)

$$\operatorname{rank} \mathcal{M}(V^{(r)}) = 1. \tag{4.5}$$

■

摂動ポテンシャル $V^{(r)}(q)$ の次数を問わずに現れる $\mathcal{M}(V^{(r)})$ のランク条件は，実は変数分離可能性と深く関わっている：

定理 4.2 [12] r-PHO のハミルトニアン

$$K^{(r)}(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(p_j^2+q_j^2) + V^{(r)}(q) \tag{4.6}$$

が回転点変換の枠内で変数分離可能なための必要十分条件は，

$$\operatorname{rank} \mathcal{M}(V^{(r)}) = 1 \tag{4.7}$$

である[15]．■

これらの結果から，一般化の議論には Bertrand-Darboux 条件の視点よりも変数分離の視点が適しているといえる．次の結果が得られる：

定理 4.3 [12] r を 3 以上の任意の奇数とする．r-PHO と $2(r-1)$-PHO とが同一の $2(r-1)$ 次 BG 正規形を共有するための必要十分条件は，r-PHO のハミルトニアンが回転点変換の枠内で変数分離可能なことである．また，$2(r-1)$ 次 BG 正規形を共有している状況下では，$2(r-1)$-PHO ハミルトニアンも r-PHO ハミルトニアンを分離する座標系にて変数分離される．■

4.2 定理 4.3 の証明（あらすじ）：必要性

必要性の証明するアイデアは極めて素朴で，r-PHO ハミルトニアンの BG 正規形と $2(r-1)$-PHO のそれとを直接比較により実行される．r を 3 以上の奇数とすると，(4.1) と (4.6) で与えられる r-PHO ハミルトニアンに対する $2(r-1)$ 次 BG 正規形 $G^{(r)}(\xi,\eta)$ は，

$$G^{(r)}(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(\eta_j^2+\xi_j^2) + G^{(r)}_{2(r-1)}(\xi,\eta), \tag{4.8}$$

$$G^{(r)}_{2(r-1)}(\xi,\eta) = \sum_{m=0}^{2(r-1)} \sum_{\ell=\max(0,m-r+1)}^{\min(r-1,m)} C^{(r)}_{m,\ell}\zeta_1^{\ell}\zeta_2^{r-1-\ell}\bar{\zeta}_1^{m-\ell}\bar{\zeta}_2^{r-1-m+\ell}, \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} C^{(r)}_{m,\ell} &= \frac{2r^2}{4^r}\sum_{j=\mu_J}^{M_J}\binom{r-1}{j}\binom{r-1}{m-j}(v_j^{(r)}v_{m-j}^{(r)} + v_{j+1}^{(r)}v_{m-j+1}^{(r)}) \\ &\quad\times \sum_{k=\mu_K}^{M_K}\sum_{h=\mu_H}^{M_H}\frac{\binom{j}{k}\binom{r-1-j}{h}\binom{m-j}{\ell-k}\binom{r-1-(m-j)}{r-1-\ell-h}}{\{(2(k+h+1)-r\}\{2(k+h)-r\}}, \end{aligned} \tag{4.10a}$$

$$\begin{cases} \mu_J = \max(0, m-(r-1))), & M_J = \min(m, r-1), \\ \mu_K = \max(0, \ell-(m-j)), & M_K = \min(j,\ell), \\ \mu_H = \max(0,(m-j)-\ell), & M_J = \min(r-1-\ell, r-1-j) \end{cases} \tag{4.10b}$$

で与えられる．また，$2(r-1)$-PHO ハミルトニアンを

$$K^{(2(r-1))}(q,p) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(p_j^2+q_j^2) + \sum_{j=0}^{2(r-1)}\binom{2(r-1)}{j}v_j^{(2(r-1))}q_1^j q_2^{2(r-1)-j} \tag{4.11}$$

[15] (4.3b) が成り立つときは，適当な並進変換のあと放物座標によって，(4.4b) が成り立つときには極座標によって分離可能である．

で与えるとき，$2(r-1)$ 次 BG 正規形 $G^{(2(r-1))}(\xi,\eta)$ は,

$$G^{(2(r-1))}(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(\eta_j^2+\xi_j^2)+G^{(2(r-1))}_{2(r-1)}(\xi,\eta), \tag{4.12}$$

$$G^{(2(r-1))}_{2(r-1)}(\xi,\eta)=\sum_{m=0}^{2(r-1)}\sum_{\ell=\max(0,m-r+1)}^{\min(r-1,m)}C^{(2(r-1))}_{m,\ell}\zeta_1^{\ell}\zeta_2^{r-1-\ell}\bar{\zeta}_1^{m-\ell}\bar{\zeta}_2^{r-1-m+\ell}, \tag{4.13}$$

$$C^{(2(r-1))}_{m,\ell}=4^{1-r}v_m^{(2(r-1))}\binom{2(r-1)}{m}\binom{m}{\ell}\binom{2(r-1)-m}{r-1-\ell} \tag{4.14}$$

で与えられる．直接比較が証明方針とはいうものの，すべての単項式 $\zeta_1^{\ell}\zeta_2^{r-1-\ell}\bar{\zeta}_1^{m-\ell}\bar{\zeta}_2^{r-1-m+\ell}$ について係数を比較するのは非現実的である．ここでは，$G^{(r)}_{2(r-1)}(\xi,\eta)=G^{(2(r-1))}_{2(r-1)}(\xi,\eta)$ 成立の必要条件としての

$$C^{(r)}_{m,1}C^{(2(r-1))}_{m,0}=C^{(r)}_{m,0}C^{(2(r-1))}_{m,1}\quad(m=2,3,\cdots,r-1), \tag{4.15}$$

について検討する[16]．さらに計算を続けると[17]，(4.15) は

$$\sum_{j=0}^{[\frac{m}{2}]-1}\left(\sum_{h=j+1}^{m-(j+1)}B_h^{(r,m)}\right)\Delta^{(r)}_{j+1\,m-j}=0\qquad(m=2,\cdots,r-1) \tag{4.16}$$

という形になる．ただし，$B_h^{(r,m)}$ は

$$\begin{aligned}&\left((r-1)^2\binom{r-2}{m-1}\right)^{-1}B_h^{(r,m)}\\&=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=m-h-1}^{r-h-1}\frac{\binom{m-1}{h}\binom{r-m}{h+k+1-m}\binom{r-2}{k}}{\{2(k+1)-r\}(2k-r)}\\ \displaystyle\qquad+\sum_{k=m-h-1}^{r-h-1}\frac{\binom{m-1}{h-1}\binom{r-m}{h+k+1-m}\binom{r-2}{k}}{\{2(k+2)-r\}\{2(k+1)-r\}}\\ \displaystyle\qquad-\sum_{k=m-h}^{r-h-1}\frac{\binom{m}{h}\binom{r-m-1}{h+k-m}\binom{r-1}{k}}{\{2(k+1)-r\}(2k-r)} & (h\neq 0,m),\\ \displaystyle\sum_{k=m-1}^{r-2}\frac{\binom{r-m}{k+1-m}\binom{r-2}{k}}{\{2(k+1)-r\}(2k-r)}\\ \displaystyle\qquad-\sum_{k=m}^{r-1}\frac{\binom{r-m-1}{k-m}\binom{r-1}{k}}{\{2(k+1)-r\}(2k-r)} & (h=0),\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{r-m-1}\frac{\binom{r-m}{k+1}\binom{r-2}{k}}{\{2(k+2)-r\}\{2(k+1)-r\}}\\ \displaystyle\qquad-\sum_{k=0}^{r-m-1}\frac{\binom{r-m-1}{k+1}\binom{r-1}{k}}{\{2(k+1)-r\}(2k-r)} & (h=m)\end{cases}\end{aligned} \tag{4.17}$$

で与えられる．また，$\Delta^{(r)}_{\alpha\,\beta}$ は (4.2) で定義される行列 $\mathcal{M}(V^{(r)})$ の第 α，第 β 列目のなす小行列式をあらわす．すなわち,

$$\Delta^{(r)}_{\alpha\,\beta}=\det\begin{pmatrix}v^{(r)}_{\alpha-1}-v^{(r)}_{\alpha+1} & v^{(r)}_{\beta-1}-v^{(r)}_{\beta+1}\\ v^{(r)}_{\alpha} & v^{(r)}_{\beta}\end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

[16] $\ell=0,1$ をとりうる条件として m は 0 から $r-1$ に制限される．

[17] 実際には，$B_h^{(r,m)}$ 内に多く現れる 2 項係数に関する性質を活用した長い計算が必要．

次の補題が成立する [12].

補題 4.4 [12] $\mathcal{M}_\nu(V^{(r)})$ $(\nu = 2, \cdots, r-1)$ で，行列 $\mathcal{M}(V^{(r)})$ の第1列目から第 ν 列目までのなす $2 \times \nu$ 小行列を表わす．$\nu = 2, \cdots, r-2$ を任意に固定するとき，

$$\mathrm{rank}\ \mathcal{M}_\nu(V^{(r)}) = 1 \tag{4.19}$$

かつ, (4.16) が $m = \nu + 1$ で成立するならば，$\mathrm{rank}\ \mathcal{M}_{\nu+1}(V^{(r)}) = 1$ が成立する．■

さて，$m = 2$ に対する (4.16) は，$\mathrm{rank}\ \mathcal{M}_2(V^{(r)}) = 1$ に他ならない．したがって，必要条件としての (4.16) と補題 4.4 から，$\mathrm{rank}\ \mathcal{M}_{r-1}(V^{(r)}) = \mathrm{rank}\ \mathcal{M}(V^{(r)}) = 1$ の成立が導かれる．さらに定理 4.2 によって，変数分離の必要性が示せる．

4.3 定理 4.3 の証明（あらすじ）：十分性

十分性を示す鍵は，任意の回転点変換と BG 正規化との可換性である．r-PHO ハミルトニアン $K^{(r)}(q,p)$ が，ある回転点変換により変数分離可能だとしよう．その回転を与える 2 次回転行列を R で表し，変数 (Q,P) と (Ξ, Y) を

$$(Q,P) = (Rq, Rp), \quad (\Xi, Y) = (R\xi, R\eta) \tag{4.20}$$

で定義し，変換を ϕ_R で表そう．このとき，

$$\tilde{K}^{(r)} \circ \phi_R = K^{(r)}, \quad \tilde{G}^{(r)} \circ \phi_R = G^{(r)} \tag{4.21}$$

で定まる $\tilde{K}^{(r)}, \tilde{G}^{(r)}$ は，同時に 0 ではない $\tilde{v}_0^{(r)}, \tilde{v}_r^{(r)}$ を選んで，

$$\tilde{K}^{(r)}(Q,P) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(P_j^2 + Q_j^2) + \tilde{v}_0^{(r)} Q_2^r + \tilde{v}_r^{(r)} Q_1^r, \tag{4.22}$$

$$\tilde{G}^{(r)}(\Xi, Y) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(Y_j^2 + \Xi_j^2) + \tilde{C}_{r-1,r-1}^{(r)}(Z_1\overline{Z}_1)^{r-1} + \tilde{C}_{0,0}^{(r)}(Z_2\overline{Z}_2)^{r-1}, \tag{4.23}$$

と表せる．ただし，$Z_j = \Xi_j + iY_j$ $(j = 1, 2)$ とし，$\tilde{C}_{r-1,r-1}^{(r)}$ 達は，(4.10) で $v_j^{(r)}$ 達を $\tilde{v}_j^{(r)}$ 達におきかえたものである．(4.14) から，$\tilde{G}^{(r)}$ は，

$$\tilde{K}^{(2(r-1))}(Q,P) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(P_j^2 + Q_j^2) + \frac{4^{r-1}}{\binom{2(r-1)}{r-1}}\left[\tilde{C}_{0,0}^{(r)} Q_2^{2(r-1)} + \tilde{C}_{r-1,r-1}^{(r)} Q_1^{2(r-1)}\right], \tag{4.24}$$

の 4 次 BG 正規形であるとわかる．すなわち，

$$\tilde{K}^{(2(r-1))} \circ \phi_R = K^{(2(r-1))} \tag{4.26}$$

を満たす変数分離可能な $2(r-1)$-PHO ハミルトニアン $K^{(2(r-1))}(q,p)$ は $K^{(r)}(q,p)$ と 4 次 BG 正規形を共有することが示せる．

5 おわりに

定理 4.3 の意味するところは,「$2(r-1)$ 次 BG 正規形を共有するという意味で似通った正則領域を持つ r-PHO と $2(r-1)$-PHO は変数分離可能，したがって可積分系である.」ということであろう．十分性の方は，ある意味ですぐ納得できることだが，必要性の方には何らかの代数的背景があるように思える．

§1で述べたように，筆者にとって逆問題を思いついた動機は，4次BG正規形ハミルトン系における量子分岐の応用であった．その観点からすると，定理4.2はよい題材を提供している．すなわち，r-PHOと$2(r-1)$-PHOがが$2(r-1)$次正規形を共有している状況下では，登場する系はすべて可積分でありエネルギー準位の評価等の厳密な議論が期待できる．

参考文献

[1] J. Moser, *Lectures on Hamiltonian Systems* (Memoirs of AMS **81**), (AMS, 1968).

[2] M.Kummer, Commun. Math. Phys., **48**, 53 (1976).

[3] R.Cushman, Proc. R. Soc. **A**, **382**, 361.

[4] Y.Uwano *et. al.*, *Computer Algebra in Scientific Computing*, V.Ganzha *et. al.* eds., 441 (Springer-Verlag, 1999).

[5] N.A.Chekanov, V.A.Rostovtsev, Y.Uwano and S.I.Vinitsky, Compu. Phys. Commun., **126**, 47 (2000).

[6] Y.Uwano, J. Phys. **A**, **33**, 6635 (2000).

[7] N.A.Chekanov, M.Hongo, V.A.Rostovtsev, Y.Uwano and S.I.Vinitsky, Phys. At. Nucl., **61**, 2029 (1998).

[8] Y.Uwano, J. Phy. Soc. Japan, **63** suppl.A, 31 (1994).

[9] Y.Uwano, J. Phys. **A**, **28**, 2041 (1995).

[10] Y.Uwano, Int. J. Bifurcation and Chaos, **8**, 941 (1998).

[11] Y.Uwano, Rep. Math. Phys., **44**, 267 (1999).

[12] Y.Uwano, *in preparation.*

[13] Y.Uwano, web page http://yang.amp.i.kyoto-u.ac.jp/ uwano/.

[15] I.Marshall and S.Wojciechowski, J. Math. Phys., **29**, 1338 (1988).

[16] Y.Y.Yamaguchi and Y.Nambu, Prog. Theor. Phys., **100**, 199 (1998).